

Rješenja i smjernice za bodovanje

U smjernicama je naveden samo jedan mogući način rješavanja, a treba priznati i bilo koji drugi ispravan postupak. Boduju se i drugi zapisi ako su u skladu s odabranim referentnim sustavom i napisanim jednadžbama u mjernim jedinicama po slobodnom izboru. Ako su preskočene trivijalne linije koje se boduju, a jednadžbe u nastavku su dobre, priznaju se bodovi kao da je napisano sve. Ne boduju se formule u kojima je upisan krivi iznos neke fizičke veličine. Dodjeljuju se samo cjelobrojni bodovi. Svaka novouvedena veličina treba biti jasno definirana ili označena na skici.

1. zadatak (20 bodova)

Radi jednostavnosti koristit ćemo se pokratama  $t_i \equiv i \text{ s}$ ,  $i \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ ,  $x_i \equiv x(t_i)$ ,  $v_i \equiv v(t_i)$ ,  $\Delta t_i \equiv t - t_i$  te  $x_{i,j}$  i  $a_{i,j}$  za relacije koje vrijede od trenutka  $t_i$  do  $t_j$ . Na danom  $x - t$  dijagramu očitamo položaje:

$$x_0 = 4 \text{ m}, x_2 = 8 \text{ m}, x_4 = 16 \text{ m}, x_6 = 26 \text{ m}, x_8 = 32 \text{ m}, x_{10} = 30 \text{ m}. \quad (1)$$

U pojedinim vremenskim intervalima, redom između  $t_0$ ,  $t_4$ ,  $t_6$  i  $t_{10}$  akceleracija je stalna jer je stalna sila te iznosi  $a_{0,4}$ ,  $a_{4,6}$  i  $a_{6,10}$ . Tada su položaji dani izrazima:

[1 bod]  $x_{0,4}(t) = x_0 + v_0 \Delta t_0 + 0.5 a_{0,4} (\Delta t_0)^2$

[1 bod]  $x_{4,6}(t) = x_4 + v_4 \Delta t_4 + 0.5 a_{4,6} (\Delta t_4)^2$

[1 bod]  $x_{6,10}(t) = x_6 + v_6 \Delta t_6 + 0.5 a_{6,10} (\Delta t_6)^2$ .

Uvrštavanjem poznatih vrijednosti (1), dobivamo skup jednadžbi

[1 bod]  $x_0 = 4 \text{ m}, x_2 = 4 \text{ m} + (2 \text{ s})v_0 + (2 \text{ s}^2)a_{0,4} = 8 \text{ m}, x_4 = 4 \text{ m} + (4 \text{ s})v_0 + (8 \text{ s}^2)a_{0,4} = 16 \text{ m}$

[1 bod]  $x_6 = 16 \text{ m} + (2 \text{ s})v_4 + (2 \text{ s}^2)a_{4,6} = 26 \text{ m}$

[1 bod]  $x_8 = 26 \text{ m} + (2 \text{ s})v_6 + (2 \text{ s}^2)a_{6,10} = 32 \text{ m}, x_{10} = 26 \text{ m} + (4 \text{ s})v_6 + (8 \text{ s}^2)a_{6,10} = 30 \text{ m}$   
iz kojih dobivamo:

[1 bod]  $v_0 = 1 \text{ ms}^{-1}, a_{0,4} = 1 \text{ ms}^{-2}$

[1 bod]  $v_{0,4}(t) = v_0 + a_{0,4} \Delta t_0 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t$

[1 bod]  $v_4 = 5 \text{ ms}^{-1}$

[1 bod]  $a_{4,6} = 0 \text{ ms}^{-2}$

[1 bod]  $v_{4,6}(t) = 5 \text{ ms}^{-1}$

[1 bod]  $v_6 = 5 \text{ ms}^{-1}$

[1 bod]  $a_{6,10} = -2 \text{ ms}^{-2}$

$$v_{6,10}(t) = v_6 + a_{6,10} \Delta t_6$$

[1 bod]  $v_{6,10}(t) = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (t - 6 \text{ s})$

[1 bod]  $v_{10} = -3 \text{ ms}^{-1}$ ,

što je prikazano na  $v - t$  dijagramu:

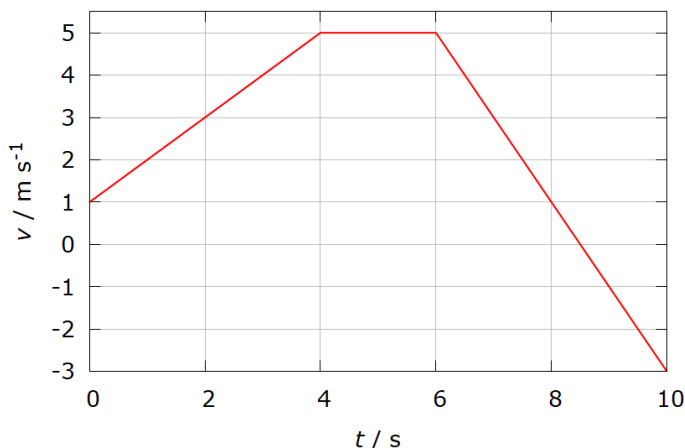
[1 bod] oznaka vremena i mjerna jedinica

[1 bod] oznaka brzine i mjerna jedinice

[1 bod] točno nacrtana linija  $v_{0,4}(t)$

[1 bod] točno nacrtana linija  $v_{4,6}(t)$

[1 bod] točno nacrtana linija  $v_{6,10}(t)$  ili  $|v_{6,10}|(t)$ .



## 2. zadatak (15 bodova)

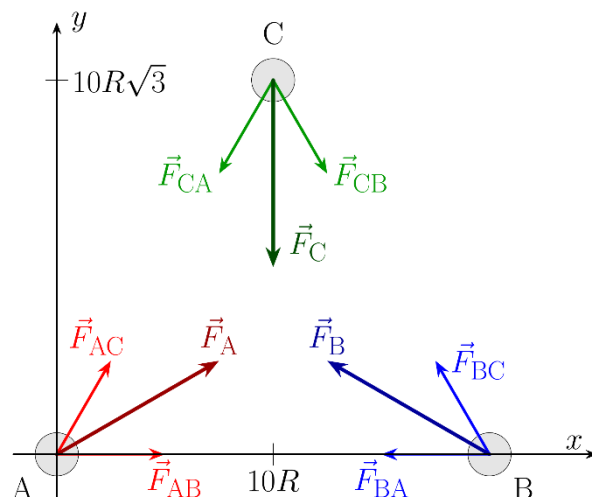
U početnom se trenutku  $t = 0$  središta tijela (kugli) nalaze u točkama  $A(0, 0)$ ,  $B(20R, 0)$  i  $C(10R, 10R\sqrt{3})$  koje čine jednakostranični trokut ABC jer je

[1 bod]  $a = |AB| = |AC| = |BC| = 20R$ .

Tijela se međusobno privlače gravitacijskim silama jednakog iznosa

[1 bod]  $|F_{ij}| = GM^2 a^{-2}$ ,

gdje je  $a$  udaljenost središta kugli. U  $t = 0$ , sile su prikazane na slici desno:



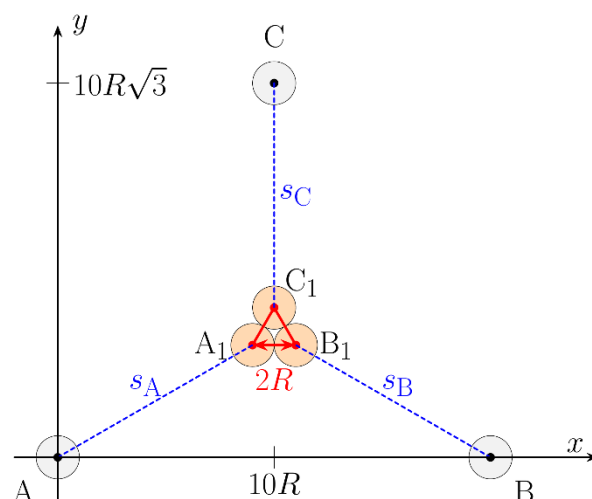
[2 boda]  $\vec{F}_A = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC}$ ,

[2 boda]  $\vec{F}_B = \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{BC}$ ,

[2 boda]  $\vec{F}_C = \vec{F}_{CA} + \vec{F}_{CB}$  (za pojedinu silu  $\vec{F}_{CA}$ ,  $\vec{F}_{CB}$  po 1 bod ili 2 boda za rezultantu  $\vec{F}_C$  te slično za  $\vec{F}_{A,B}$ ).

Zbog simetrije sva tri tijela tijekom gibanja čine jednakostranični trokut koji se postupno smanjuje prema sjecištu visina  $S$  u trokut  $A_1B_1C_1$  kada se kugle sudaraju, kao na slici desno.

[1 bod] Naime, rezultante  $\vec{F}_{A,B,C}$  stalno su usmjerene iz vrha prema polovištu nasuprotne stranice, a prema tome i brzine. Svako tijelo ide pravocrtno, prateći visinu jednakostraničnog trokuta do sudara, kada su središta kugli međusobno udaljena



[1 bod]  $a_1 = 2R$ .

Podijelimo li trokut ABC na 3 sukladna trokuta ABS, BCS i CAS kao na slici desno, iz površina slijede odnosi visina

$$P_{ABC} = P_{ABS} + P_{BCS} + P_{CAS} = 3P_{ABS},$$

[1 bod]  $av/2 = 3av'/2 \Rightarrow v' = v/3 = a\sqrt{3}/6$ .

Vrhovi trokuta ABC udaljeni su od sjecišta visina  $S$  za

[1 bod]  $d = |AS| = |BS| = |CS| = v - v' = 2v/3 = 20R\sqrt{3}/3$ .

Slično slijedi udaljenost vrhova trokuta  $A_1B_1C_1$  od  $S$ ,

$$d_1 = |A_1S| = |B_1S| = |C_1S| = 2v_1/3.$$

Visina trokuta  $A_1B_1C_1$ , iznosi

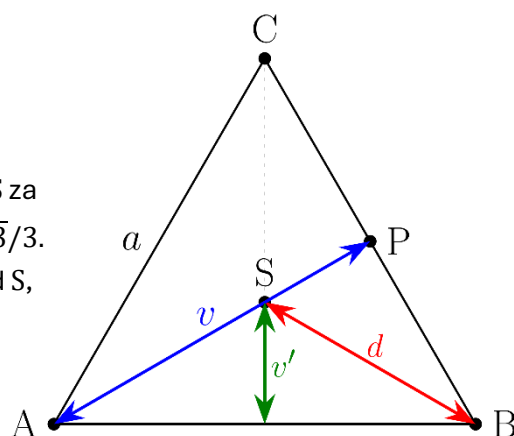
$$v_1 = a_1\sqrt{3}/2 = R\sqrt{3} \text{ pa je}$$

[1 bod]  $d_1 = 2R\sqrt{3}/3$ .

Tijela B i C prijeđu jednak put kao i tijelo A,

[1 bod]  $s_A = |AA_1| = d - d_1$ . Dakle,

[1 bod]  $s_A = s_B = s_C = (20 - 2)R\sqrt{3}/3 = 6\sqrt{3}R \Rightarrow s_A/R = s_B/R = s_C/R = 6\sqrt{3}$ .



### 3. zadatak (15 bodova)

Na tijelo mase  $m = 100 \text{ g} = 0.1 \text{ kg}$ , izbačeno iz ishodišta početnom brzinom  $v_0$ , pod kutom od  $60^\circ$  s obzirom na os  $x$ , cijelo vrijeme gibanja djeluje gravitacijska sila  $F_y = -mg$  suprotno  $y$ -smjeru te konstantna sila vjetra  $F_x = -0.1 \text{ N}$  suprotno  $x$ -smjeru pa akceleracije prema 2. Newtonovu zakonu iznose:

[1 bod]  $a_x = F_x/m = -1 \text{ ms}^{-2}$ ,

[1 bod]  $a_y = F_y/m = -g = -9.81 \text{ ms}^{-2}$ .

Složeno gibanje analiziramo kao dva neovisna gibanja sa stalnim akceleracijama  $a_x$  i  $a_y$  te početnim brzinama

[1 bod]  $v_{0x} = v_0 \cos 60^\circ = 0.5 v_0$

[1 bod]  $v_{0y} = v_0 \sin 60^\circ = 0.5\sqrt{3} v_0$ .

Tada su koordinate položaja tijela

[1 bod]  $x = 0.5 v_0 t + 0.5 a_x t^2$  (1)

[1 bod]  $y = 0.5\sqrt{3} v_0 t + 0.5 a_y t^2$ . (2)

Početnu brzinu izrazimo iz (1)

[1 bod]  $v_0 = (2x - a_x t^2)/t$  (3)

i uvrstimo u dvostruki (2) za visinu spremnika  $y = 4 \text{ m}$ ,

[1 bod]  $8 \text{ m} = 2\sqrt{3} x - \sqrt{3} a_x t^2 + a_y t^2$

iz čega slijedi vrijeme proteklo do dolaska u točku  $(x, 4 \text{ m})$ ,

[1 bod]  $t^2 = (8 \text{ m} - 2\sqrt{3} x)/(a_y - \sqrt{3} a_x) \Rightarrow t = \sqrt{(8 \text{ m} - 2\sqrt{3} x)/(a_y - \sqrt{3} a_x)}$ . (4)

Tijelo na visini  $y = 4 \text{ m}$  upast će u spremnik ako su njegove koordinate između

[1 bod]  $x_8 = 8 \text{ m}$  i

[1 bod]  $x_{10} = 10 \text{ m}$

što se prema (4) postiže za vrijeme

[1 bod]  $t_8 \approx \sqrt{2.44} \text{ s} \approx 1.56 \text{ s}$  i

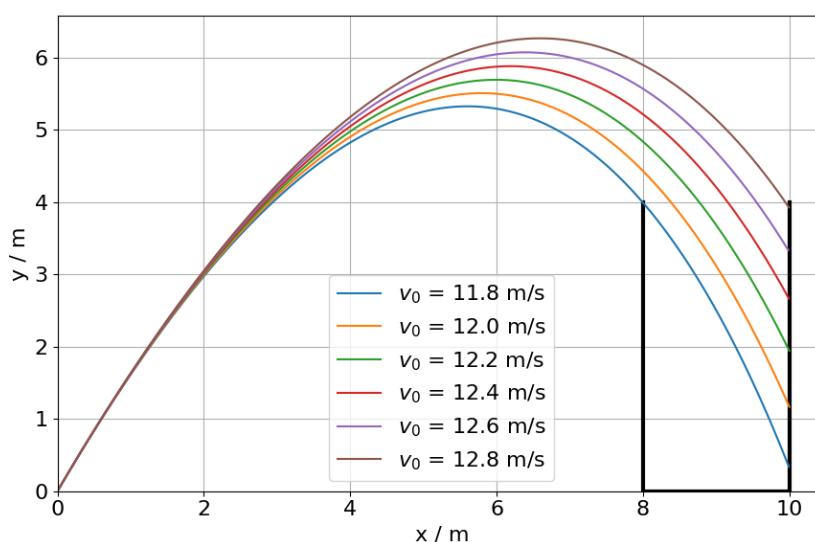
[1 bod]  $t_{10} \approx \sqrt{3.30} \text{ s} \approx 1.82 \text{ s}$

pa početne brzine prema (3) mogu biti između

[1 bod]  $v_0 \approx 11.8 \text{ m/s}$  i

[1 bod]  $v_0 \approx 12.8 \text{ m/s}$ , odnosno

$11.8 \text{ m/s} \lesssim v_0 \lesssim 12.8 \text{ m/s}$ .



#### 4. zadatak (20 bodova)

Tijelo mase  $m$ , netom prije puštanja u trenutku  $t_M$ , miruje,  $v_M = 0$ , u točki  $M(-R\sqrt{3}/2, R/2)$  na visini  $y_M = R/2$  u odnosu na os  $x$  koju odabiremo kao nultu razinu za gravitacijsku potencijalnu energiju. Ukupna mehanička energija jednaka je gravitacijskoj potencijalnoj,

[1 bod]  $E(t_M) = E_k(t_M) + E_{gp}(t_M) = mv_M^2/2 + mgy_M = mgR/2.$

Tijelo u trenutku  $t_0 = 0$  dolazi u  $(x_0 = 0, y_0 = 0)$  te postiže brzinu  $v_0$ . Ukupna energija,

[1 bod]  $E(t_0) = E_k(t_0) + E_{gp}(t_0) = mv_0^2/2 + mgy_0 = mv_0^2/2,$

jednaka je onoj u trenutku  $t = t_M$ , jer su zanemarivi trenje i otpor zraka,

[1 bod]  $mgR/2 = mv_0^2/2,$

iz čega slijedi brzina u  $x$ -smjeru (vodoravnom)

[1 bod]  $v_0 = \sqrt{gR}.$

Na vodoravnom dijelu ukupna sila iščezava pa se tijelo giba jednoliko, bez promjene visine,

[1 bod]  $y = 0$ , od  $x_0 = 0$  do  $x_1 = R/2$  (1)

gdje je brzina u  $x$ -smjeru jednaka  $v_0$ ,

[1 bod]  $v_1 = v_0 = \sqrt{gR}.$

U trenutku

[1 bod]  $t_1 = t_0 + (x_1 - x_0)/v_1 = 0.5 \sqrt{R/g}$  (2)

tijelo se nalazi na početku drugog luka radijusa

[1 bod]  $r = R/2.$

Da bi tijelo ostalo priljubljeno uz podlogu, potrebna je centripetalna akceleracija

[1 bod]  $a_c = v_1^2/r = 2gR/R = 2g$

[1 bod] što je manje od  $g$ , odnosno najveće akceleracije prema središtu  $(R/2, -R/2)$  koju može dati gravitacijska sila. Zato se tijelo odvaja u početnoj točki drugog luka  $(x_1 = R/2, y_1 = 0)$  te izvodi horizontalni hitac s početnom brzinom  $v_1$  u  $x$ -smjeru:

[1 bod]  $x(t) = x_1 + v_1(t - t_1) = R/2 + \sqrt{gR}(t - t_1),$  (3)

[1 bod]  $y(t) = -0.5g(t - t_1)^2.$  (4)

Gibanje analiziramo do trenutka, kada je  $x_2 = 1.5R$ ,

[1 bod]  $t_2 = t_1 + (x_2 - x_1)/v_1 = 0.5\sqrt{R/g} + R/\sqrt{gR} = 1.5\sqrt{R/g}.$  (5)

Iz (3) izrazimo vremenski interval  $(t - t_1)$  te uvrstimo u (4) da eliminiramo vrijeme,

[1 bod]  $t - t_1 = (x - R/2)/\sqrt{gR},$

[1 bod]  $y(x) = -0.5g(x - R/2)^2/(gR) = -(x - R/2)^2/(2R).$  (6)

Iz (1), (2), (3), (4), (5) i (6) slijede konačni zapisi visine  $y$  u ovisnosti o  $t$  i  $x$ :

[1 bod]  $y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 0.5\sqrt{R/g} \\ -0.5g(t - 0.5\sqrt{R/g})^2, & 0.5\sqrt{R/g} \leq t \leq 1.5\sqrt{R/g}, \end{cases}$

[1 bod]  $y(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 0.5R \\ -(x - R/2)^2/(2R), & 0.5R \leq x \leq 1.5R. \end{cases}$

U trenutku  $t_2$  tijelo se nalazi na položaju

[1 bod]  $(x_2 = 1.5R, y_2 = -R/2)$

odnosno u središtu donje polukružnice kada je od početnog položaja udaljeno

[1 bod]  $d = \sqrt{(|x_0| + x_2)^2 + (y_0 + |y_2|)^2} = \sqrt{(\sqrt{3}R/2 + 3R/2)^2 + (R/2 + R/2)^2} =$

[1 bod]  $d = 0.5R\sqrt{(\sqrt{3} + 3)^2 + 4} = 0.5R\sqrt{16 + 6\sqrt{3}} \approx 2.57R.$